VARIETE DE NON-SYNTHESE SPECTRALE SUR UN GROUPE ABELIEN LOCALEMENT COMPACT

PAR

M. FILIPPI

RESUME

On demontre quelques résultats concernant les ensembles de synthèse ou de résolution spectrale dans les groupes abeliens localement compacts.

§1. **Introduction.** Soit Γ un groupe localement compact, la loi de groupe de Γ sera notée additivement, et soit G son dual (groupe des caractères g de Γ). Un caractère de Γ est une fonction continue bornée sur Γ, et nous noterons, par abus de langage, de la même façon un élément de G et la classe dans $L^\infty(\Gamma)$ de la fonction sur Γ qu'il définit. Soit V un sous-espace faiblement fermé invariant par translation de $L^\infty(\Gamma)$, nous appellerons spectre de V l'ensemble $\sigma(V)$ des éléments de G qu'il contient.

Le problème de la synthèse spectrale est le suivant: notant par V_1 la sous-variété de $L^\infty(\Gamma)$, faiblement fermée, invariante par translation, engendrée par les caractères appartenants à $\sigma(V)$, V_1 est la plus petite sous-variété de spectre $\sigma(V)$. Nous dirons que V est une *variété de synthèse spectrale* si $V = V_1$. Alors "la synthèse est possible" pour tout élément de V, c'est à dire que tout élément de V peut être approché dans $L^\infty(\Gamma)$ par des combinaisons linéaires des caractères appartenant à $\sigma(V)$.

Une caractérisation des variétés de non-synthèse spectrale semble difficilement abordable; dans [2] P. Malliavin a montré l'existence des variétés de non-synthèse sur un groupe abélien localement compact, non compact (la synthèse sur un groupe compact étant toujours possible). On est ainsi amené à travailler sur une notion plus restrictive que celle de synthèse spectrale: on appelle "*variété de résolution spectrale*" une variété faiblement fermée V, invariante par translation, telle que toute sous-variété de V fermée, invariante par translation, soit de synthèse spectrale.

Notations. Nous noterons comme d'habitude $\|\cdots\|_\infty$ et $\|\cdots\|_1$ les normes dans $L^\infty(\Gamma)$ et $L'(\Gamma)$ resp., $M^1(\Gamma)$ notera l'algèbre des mesures bornées sur Γ, et nous noterons encore $\|\cdots\|_1$ la norme dans $M^1(\Gamma)$.

Le produit de convolution dans le groupe Γ, sera noté par un simple point,

Received May 8, 1965.

et nous écrirons également $e^{\cdot a}$ pour l'exponentielle de convolution de a dans Γ, et $a^{\cdot 2}$ pour le carré de convolution de a.

Le produit de convolution dans le groupe additif des réels sera, lui, noté par une étoile ($*$).

Enfin, soit Φ un élément de $L^\infty(\Gamma)$, nous noterons (Φ) la sous-variété fermée engendrée par Φ et ses translatés.

1.1. **Unicité et résolution spectrale.** Soit V une variété fermée invariante par translation dans $L^\infty(\Gamma)$, nous étudierons la synthèse spectrale dans cette variété en relation avec la décroissance à l'infini des éléments de V.

DÉFINITION 1. Nous appellerons $L_0^\infty(\Gamma)$ l'espace des fonctions de $L^\infty(\Gamma)$ qui "tendent vers 0 à l'infini", c'est à dire l'espace des fonctions $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$ telles que quel que soit $\varepsilon > 0$ donné, il existe un compact K de Γ, tel que, si h_K note la fonction caractéristique de K, $\| \Phi (| - h_K) \|_\infty < \varepsilon$.

Nous aurons alors un théorème qui relie la notion de résolution spectrale à celle, mieux connue, "d'ensemble d'unicité". Rappelons que, soit Γ un groupe localement compact et G son dual, on appelle ensemble d'unicité un ensemble fermé $E \subset G$, tel que si $\Phi \in L_0^\infty(\Gamma)$, et que le spectre de (Φ) est dans E, alors Φ est nulle. Nous dirons qu'un ensemble fermé $E \subset G$, est de résolution spectrale si il n'est le spectre que d'une variété de $L^\infty(\Gamma)$, et que cette variété est de résolution spectrale:

THÉORÈME 1. *Dans un groupe localement compact G, tout ensemble de résolution spectrale est un ensemble d'unicité.*

Ce résultat a été démontré par P. Malliavin dans [3], dans le cas où le groupe G est le tore à une dimension C.

1.2. **Décroissance à l'infini.** Pour étudier la décroissance à l'infini d'un élément de $L^\infty(\Gamma)$, nous utiliserons les notions suivantes:

DÉFINITION 2. On appelle "suite d'unités approchées de $L^1(\Gamma)$" une suite φ_i de fonctions de $L^1(\Gamma)$, de normes 1, positives, telles que pour toute fonction sur Γ, α, à support compact et continue, $\int_\Gamma \alpha\varphi_i d\gamma$ ($d\gamma$ mesure de Haar sur Γ) tende vers $\alpha(0)$ quand i tend vers l'infini (0 étant l'élément neutre de Γ).

Nous savons que de telles suites existent si et seulement si Γ a une base dénombrable de voisinage de l'élément neutre.

Etant donnée une suite d'unités approchées, à une fonction $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$, et à tout $\varepsilon > 0$, on associe les ensembles

$$A_\varepsilon[\Phi, \{\varphi_i\}] = \{\gamma \in \Gamma / \limsup (\Phi \cdot \varphi_i)(\gamma) \geqq \varepsilon\} \tag{1.1}$$

$$B_\varepsilon[\Phi, \{\varphi_i\}] = A_\varepsilon[\Phi, \{\varphi_i\}] - A_\varepsilon[\Phi, \{\varphi_i\}]. \tag{1.2}$$

Une autre manière canonique, mais moins fine, d'étudier la décroissance à l'infini de Φ est: étant donnée une base dénombrable $\mathscr{B}$ de voisinages ouverts de l'élément neutre de Γ, on pose:

$$d\Phi(\gamma) = \limsup_{V \in \mathscr{B}} \| \Phi(x)h_V(x-\gamma) \|_\infty$$

(où h_V est la fonction caractéristique du voisinage ouvert V).

Nous considèrerons alors les ensembles:

$$(1.1') \qquad \tilde{A}_\varepsilon(\Phi) = \{\gamma \in \Gamma / d\Phi(\gamma) \geqq \varepsilon\}$$

$$(1.2') \qquad \tilde{B}_\varepsilon(\Phi) = \tilde{A}_\varepsilon(\Phi) - \tilde{A}_\varepsilon(\Phi).$$

Remarquons que si la fonction Φ est continue ces deux notions coïncident, (c'est à dire que $A_\varepsilon(\Phi, \{\varphi_i\}) = \tilde{A}_\varepsilon(\Phi)$), et que les éléments de $L_0^\infty(\Gamma)$ sont les fontions Φ de $L^\infty(\Gamma)$, dont les $A_\varepsilon(\Phi, (\varphi_i\})$ et les $\tilde{A}_\varepsilon(\Phi)$ sont relativement compacts.

1.3. **Enoncé des résultats.**

Propriété (P). Un ensemble B dans Γ possède la propriété (P), si, quel que soit le nombre entier N, et quel que soit un nombre fini d'éléments γ_i de Γ, on peut trouver un élément $\gamma \in \Gamma$ dont tous les multiples non nuls d'ordre inférieur en valeur absolue à N n'appartiennent pas à $\cup_i(B+\gamma_i)$.

Théorème 2. *Soit Γ un groupe localement compact, ayant une base dénombrable de voisinages de l'origine, soit $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$; supposons qu'il existe une suite d'unités approchées φ_i telles que les ensembles $B_\varepsilon(\Phi, \{\varphi_i\})$ possèdent pour tout $\varepsilon > 0$ la propriété (P), alors (Φ) n'est pas de résolution spectrale.*

Théorème 2'. *Soit Γ un groupe localement compact, ayant une base dénombrable de voisinages de l'origine, soit $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$; supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, les ensembles $\tilde{B}_\varepsilon(\Phi)$ vérifient la propriété (P), alors (Φ) n'est pas de résolution spectrale.*

Théorème 3. *Soit dans un groupe localement compact Γ, une variété V fermée invariante par translation de $L^\infty(\Gamma)$, telle que $V \cap L_0^\infty(\Gamma) \neq \{0\}$ alors V n'est pas de résolution spectrale.*

Le théorème 1 énoncé plus haut n'est, bien entendu, que la forme (un peu moins précise) que prend le théorème 3 si on le traduit, par dualité, en termes d'ensembles dans le dual G de Γ (en regardant les spectres de nos variétés). C'est sous la forme du théorème 3 qu'il sera démontré.

Théorème 4. *Considérons le groupe $\mathbf{Z}^n$; soit $\Phi \in L^\infty(\mathbf{Z}^n)$ telle que les ensembles $\tilde{B}_\varepsilon(\Phi)$ soient pour tout $\varepsilon > 0$ de "densité inférieure" nulle, alors (Φ) n'est pas de résolution spectrale.*

Rappelons que si $B \subset \mathbf{Z}^n$, on appelle "densité inférieure" de B la limite inférieure du rapport $|B \cap K_p| \, |K_p|^{-1}$ où K_p est le cube des éléments de coordonnées, dans $\mathbf{Z}^n$, toutes inférieures à p en valeur absolue, et $|A|$ le nombre d'éléments de $A \subset \mathbf{Z}^n$.

Enfin nous démontrerons, comme corollaire du théorème 4, le

THÉORÈME 5. *Dans le tore à une dimension C, l'ensemble de Cantor n'est pas de résolution spectrale.*

Ce résultat (qui a été montré indépendamment par Kahane et Katznelson dans [1]) donne alors un exemple d'ensemble d'unicité (l'ensemble de Cantor étant d'unicité, cf. [5]) qui n'est pas de résolution spectrale.

§2. **Démonstration du théorème** 2.

La démonstration de ce théorème se fera en deux temps:

— un premier lemme montrera que si il existe une fonction $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$ et une fonction $a \in L^1(\Gamma)$ telles que $\| e^{\cdot iua} \cdot \Phi \|_\infty (1 + |u|)$ soit intégrable (en la variable réelle u), alors (Φ) n'est pas de résolution spectrale.

— nous construirons ensuite explicitement, lorsque Φ vérifie les hypothèses du théorème 1, une fonction $a \in L^1(\Gamma)$, qui avec Φ vérifie les hypothèses du lemme précédent.

2.1. LEMME. 1. *Soit Γ un groupe localement compact, supposons qu'il existe une mesure bornée $a \in M^1(\Gamma)$, et une fonction $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$, telles que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| e^{\cdot iua} \cdot \Phi \|_\infty (1 + |u|) du < +\infty \tag{2.1}$$

alors il est possible de trouver une constante c réelle, telle qu'en posant $b = a + c\delta$ (δ étant la mesure de Dirac à l'élément neutre de Γ), la fonction de $L^\infty(\Gamma)$ $\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\cdot iub} \cdot \Phi) u \, du$ vérifie

$$b \cdot \Psi \neq 0 \tag{2.2}$$

$$b \cdot b \cdot \Psi = 0 \tag{2.3}$$

(Φ) n'est pas de résolution spectrale.

Démostration. Remarquons d'abord que la relation (2.1) est aussi vérifiée en remplaçant a par b, car $e^{\cdot iub} = e^{iuc} e^{\cdot iua}$, et e^{iuc} est un nombre de module 1.

Soit $F(x)$ une fonction de la forme

$$F(x) = P(x) e^{-x^2}, \tag{2.4}$$

où P est un polynôme; alors $F(u)$ (transformée de Fourier de $F(x)$) décroit à l'infini comme $|u|^n e^{-u^2}$ n étant le degré de P). Cette fonction étant entière, nous pouvons définir la mesure bornée $F(b)$. D'autre part, la fonction de **R** à valeur dans l'espace de Banach $M^1(\Gamma)$, $e^{\cdot iub}\hat{F}(u)$ est continue et de norme intégrable ($\|e^{\cdot iub}\|_1 \leqq e^{|u|\|b\|_1}$), elle est donc intégrable; soit I son intégrale, et g un caractère de Γ, on a:

$$\langle I, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{\cdot iub}, g\rangle \hat{F}(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\langle b,g\rangle}\hat{F}(u)du$$

qui est égal d'après la formule d'inversion de Fourier à $2\pi F(\langle b, g\rangle)$. Nous avons donc:

$$F(b) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cdot iub}\, \hat{F}(u)du \tag{2.5}$$

$u\,e^{\cdot iub}\cdot \Phi$ est une fonction à valeur vectorielle dans $L^\infty(\Gamma)$ continue et de norme intégrable, donc intégrable dans $L^\infty(\Gamma)$, soit

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\cdot iub} \cdot \Phi)u\, du, \quad \text{on a:} \tag{2.6}$$

$$F(b) \cdot \Psi = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cdot iub}\hat{F}(u)\, du \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\cdot itb} \cdot \Phi)t\, dt.$$

Or la fonction de R^2 dans $L^\infty(\Gamma)$, $(u,t) \xrightarrow{\alpha} e^{\cdot i(u+t)b} \cdot \Phi$, est continue et sa norme est majorée par le produit $\| e^{\cdot iub}\|_1 \|e^{\cdot iub} \cdot \Phi\|_\infty$, donc $\alpha(u,t)\,\hat{F}(u)t$ est intégrable, et d'après Lebesgues-Fubini on a:

$$F(b) \cdot \Psi = 1/2\pi \int_{R^2} (e^{\cdot i(u+t)b} \cdot \Phi)\, \hat{F}(u)t\, du\, dt$$

soit en posant $v = u + t$ et en appliquant encore Fubini

$$F(b) \cdot \Psi = \int_{-\infty}^{1/2\pi+\infty} (e^{\cdot ivb}\cdot \Phi)(\hat{F} * f)(v)dv \tag{2.7}$$

où $f(v) = v$.

1) Prenons $F(x) = x\,e^{-x^2}$, $\hat{F}(u) = u\ e^{-u^2/4}(\sqrt{\pi/2})$ et son produit de convolution avec la fonction f est une constante égale à 2π. Donc

$$b \cdot e^{\cdot -b^2} \cdot \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\cdot iub} \cdot \Phi)du,$$

soit:

$$b \cdot e^{\cdot -b^2} \cdot \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\cdot iua} \cdot \Phi)e^{iuc}du.$$

Mais $e^{\cdot iua} \cdot \Phi$ étant une fonction continue non nulle à l'origine (Φ étant supposée non nulle), elle ne peut pas être orthogonale à toutes les fonctions e^{iuc} pour c réel quelconque, donc il est possible de trouver c tel que $b \cdot e^{\cdot - b^2} \cdot \Psi$ ne soit pas nul ce qui entraine:

$$b \cdot \psi \neq 0. \tag{2.2}$$

2) Prenons maintenant $F(x) = x^2 e^{-x^2}$, sa transformée de Fourier est $\hat{F}(u) = \sqrt{\pi/2}(u^2/4 - 1)e^{-u^2/4}$ dont le produit de convolution avec f est nul, donc $b \cdot b \cdot e^{\cdot - b^2} \cdot \Psi$ est nul, et en convolant par $e^{\cdot b^2}$, on a:

$$b \cdot b \cdot \Psi = 0. \tag{2.3}$$

3) b $\cdot \Psi$ étant différent de zéro, il existe une fonction $\varepsilon \in L^1(\Gamma)$ telle que $\varepsilon \cdot b \cdot \Psi \neq 0$; par contre (2.3) entraine que l'idéal engendré par $\varepsilon \cdot b \cdot \varepsilon \cdot b$ dans $L^1(\Gamma)$ est orthogonal à Ψ, donc que les caractères de Γ contenus dans (Ψ) sont orthogonaux à $\varepsilon \cdot b \cdot \varepsilon \cdot b$ et donc à $\varepsilon \cdot b$: ceci entraine alors que ces caractères ne peuvent pas engendrer (Ψ).

Enfin Ψ appartenant à (Φ), (Ψ) est inclus dans (Φ) et:

(Φ) *n'est pas de résolution spectrale.*

2.2. LEMME 2. *Soit Φ un élément de $L^\infty(\Gamma)$, vérifiant les hypothèses du théorème 2, alors il existe une mesure bornée a sur Γ, telle que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| e^{\cdot iua} \cdot \Phi \|_\infty (1 + |u|) du < + \infty. \tag{2.1}$$

Démonstration. Nous allons construire cette mesure a en choisissant convenablement une suite (γ_k) d'éléments de Γ, et en prenant

$$a = \sum_k k^{-2}(1/2i)(\delta_{\lambda_k} - \delta_{-\lambda_k}) \tag{2.8}$$

où si $\gamma \in \Gamma$, δ_γ note la mesure de Dirac au point γ.

Nous serons amenés, pour vérifier que notre mesure a satisfait (2.1) à utiliser des majorations des coefficients du développement de $e^{\cdot(u/2)(\delta^\lambda - \delta^{-\lambda})}$ en somme de mesures discrètes de masses 1, c'est à dire les coefficients du développement en série de Fourier de $e^{iu\, Im \langle \gamma, g \rangle}$ que nous allons donner maintenant.

2.2.1. **Majorations de fonction de Bessel.** Soit γ un élément de Γ, nous noterons par $r(\gamma)$ l'ordre de γ, c'est à dire le plus petit entier positif n tel que $n \cdot \gamma = 0$. La fonction $e^{iu \cdot Im \langle \gamma, g \rangle}$ se développe en fonction uniquement des caractères de G appartenant au sous-groupe engendré par γ, et dont les coefficients de ce développement se calculent en se plaçant dans le sous-groupe engendré par γ, au lieu de Γ, et son dual au lieu de G, ils ne dépendent donc que de l'ordre de γ.

Nous avons les développements suivants:

$$e^{iu\, Im \langle \gamma, g \rangle} = \sum_{m \in R(r)} P_{m,r}(u) \langle m\gamma, g \rangle \tag{2.9}$$

$$e^{\cdot(u/2)(\delta\gamma - \delta - \gamma)} = \sum_{m \in R(r)} P_{m,r}(u) \delta_{m\gamma} \tag{2.10}$$

en posant $R(+\infty) = Z =$ groupe des entiers

$$R(r) = Z/rZ \quad \text{si} \quad r < +\infty$$

(par abus de langage, nous noterons par la même lettre un élément de Z/rZ et la classe des entiers modulo r correspondants).

Nous noterons $P_{n,\infty}$ par P_n; les coefficients sont donnés par les formules:

$$P_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iu\sin x}e^{-inx}\,dx$$

$$P_{m,r}(u) = \sum_{k=0}^{k=r-1}(1/r)e^{iu\sin(2\pi k/r)}\,e^{-i2\pi\nu k/r}, \qquad \nu \in m.$$

Soit C le tore à une dimension, dont le dual est Z, le sous-groupe de C formé par les $e^{i2\pi k/r}$ a pour dual Z/rZ; en calculant le développement de $e^{iu\sin x}$ dans le groupe C aux points $x = 2\pi k/r$ on a:

$$\begin{aligned} e^{iu\sin(2\pi k/r)} &= \sum_{\nu\in Z} P_\nu(u)e^{i2\pi\nu k/r} \\ &= \sum_{m\,\in Z/rZ}\left[\sum_{\nu\in m} P_\nu(u)\right]e^{i2\pi k\nu/r} \end{aligned}$$

d'où la formule:

(2.11) $$P_{m,r}(u) = \sum_{\nu\in m} P_\nu(u).$$

Nous avons les majorations suivantes:

(2.12) $$|P_{m,r}(u)| \leqq 1 \text{ quel que soit } u,\ r \text{ et } m\in R(r),$$

majorations qui sont évidentes d'aprés les formules du calcul explicite de ces coefficients.

La dérivée seconde de $e^{iu\cdot\sin x}$ est $-e^{iu\cdot\sin x}(u^2\cos^2 x + iu\cos x)$ dont les coefficients de Fourier sont majorés par $(|u|^2 + |u|)$, or ces coefficients sont P_n/n^2, donc on a:

(2.13) $$|P_n(u)| \leqq (|u|^2 + |u|)/n^2 \text{ pour } n \neq 0.$$

On tire de cette majoration deux conséquences immédiates dont nous aurons besoin:

(2.14) $$\sum_{m\,\in R(r)}|P_{m,r}(u)| \leqq \sum_{n\in Z}|P_n(u)| \leqq 1 + A(|u|^2 + |u|).$$

Soit d un nombre entier positif, soit $m\,\varepsilon R\,(r)$, nous dirons que m est supéreur en valeur absolue à d et on note $|m| > d$ si quel que soit $\nu\in m\,|\nu| > d$. D'autre part, $|m| \leqq d$ notera la proposition contraire de $|m| > d$. Alors pour $R > 0$ donné, quel que soit r, fini ou infini, et quel que soit $|u| < R$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier positif d tel que:

(2.15) $$\sum_{|m|>d} |P_{m,r}(u)| < \varepsilon.$$

Enfin quel que soit $r \geqq 2$, nous avons si $1 \notin m$ (m élément de $R(r)$)

(2.16) $$|P_{m,r}(u)| \leqq |P_0(u)| + \sum_{|\nu| \geqq 2} |P_\nu(u)|.$$

Comme nous avons de plus $P_0(0) = 1$, et $P_1(0) = 0$, il existe un nombre positif ξ_0 tel que $|P_1(u)| < |P_0(u)|$ si $|u| < \xi_0$, donc l'inégalité (2.16) est valable pour tout élément m de $R(r)$ mais en imposant cette fois-ci la condition $|u| < \xi_0$.

Considérons alors la somme $\sum_{|\nu| \geqq 3} |P_\nu(u)|$: pour $|\nu| \geqq 3$, les deux premières dérivées de $P_\nu(u)$ à l'origine sont nulles, et la série des modules des dérivées troisièmes des $P_\nu(u)$ est une série normalement convergente (série des coefficients de Fourier de $-i \sin^3 x\, e^{iu \sin x}$); nous avons donc pour $|u| < 1$:

$$\sum_{|\nu| \geqq 3} |P_\nu(u)| < |u|^3 B \text{ (où } B \text{ est une constante positive).}$$

Les dérivées à l'origine de $P_0(u)$ et $P_2(u)$ sont nulles, la dérivée seconde en $u = 0$ de $P_0(u)$ est -1, et celle de $P_2(u)$ est $1/4$; comme $|P_0(0)| + \sum_{|\nu| \geqq 2} |P_\nu(0)| = 1$, il existe un nombre $\alpha < 1$, et un nombre ξ, $0 < \xi < \frac{1}{2}\xi_0$ tels que:

(2.17) $$|P_{m,r}(u)| < \alpha \text{ pour } r \geqq 2,\ m \text{ quelconque, et } \xi < |u| < 2\xi.$$

2.2.2. **Estimée de normes par régularisation.**

Soit (φ_i) la suite d'unités approchées de $L^1(\Gamma)$, nous devrons déduire une majoration de normes de certaines expressions dépendant de Φ, à partir de majorations sur les normes d'expressions analogues où Φ est remplacé par l'une de ses régularisés $\Phi \cdot \varphi_i$ ($\Phi \cdot \varphi_i$ sera toujours noté dans la suite par Φ_i); c'est pourquoi nous démontrerons ici le lemme suivant:

LEMME 3. *Soit (φ_i) une suite d'unités approchées de $L^1(\Gamma)$, soit $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$ et supposons que en tout point γ de Γ on ait*

$$\limsup |\Phi_i(\gamma)| \leqq 1$$

alors $\|\Phi_\infty\| \leqq 1$.

Démonstration. Soit α une fonction continue *à* support compact $K \subset \Gamma$, $\varphi_i \cdot \alpha$ converge, en norme dans $L^1(\Gamma)$, vers α: en effet, soit V un voisinage compact de l'élément neutre 0, et soit φ_{iV} les restrictions à V des fonctions φ_i, $\|\varphi_i - \varphi_{iV}\|_1$ tend vers zéro quand i tend vers l'infini, donc $(\varphi_i - \varphi_{iV}) \cdot \alpha$ converge vers 0 dans $L^1(\Gamma)$, et $\varphi_{iV} \cdot \alpha$ converge dans $L_1(\Gamma)$ en norme vers $\alpha(\{\varphi_{iV} \cdot \alpha\}$ étant un ensemble de fonctions uniformément équicontinues à support dans un compact fixe, convergeant ponctuellement vers α).

La norme dans $L^\infty(\Gamma)$ de Φ est la borne supériere pour toutes les foctions α continues à support compact de norme 1 dans $L^1(\Gamma)$ de $|\langle \Phi, \alpha \rangle|$; de plus $\langle \Phi, \alpha \rangle$ est la limite de $\langle \Phi_i, \alpha \rangle$, quand i tend vers l'infini, car

$$\langle \Phi_i, \alpha \rangle = (\Phi_i \cdot \check{\alpha})(0) = (\Phi \cdot \varphi_i \cdot \check{\alpha})(0) \qquad \text{(où } \check{\alpha} \text{ désigne } \check{\alpha}(\gamma) = \alpha(-\gamma))$$

et $\Phi_i \cdot \alpha$ converge dans $L^1(\Gamma)$ vers α.

Notons alors $S_p(\varepsilon)$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que quel que soit $i \geqq p$; $|\Phi_i(\gamma)| < 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitrairement donné). La réunion des $S_p(\varepsilon)$ est tout Γ. Soit une fonction continue à support compact de norme 1 dans $L^1(\Gamma)$, la mesure de $K \cap (S_p(\varepsilon)$ tendant vers 0 quand p tend vers l'infini, il existe p_0 tel que l'integrale de α sur $S_{p_0}(\varepsilon)$ soit inférieure à ε. Nous avons:

$$\langle \Phi_i, \alpha \rangle = \int_{S_{p_0(\varepsilon)}} \Phi_i(\gamma)\alpha(\gamma)d\gamma + \int_{(S_{p_0(\varepsilon)})} \Phi_i(\gamma)\alpha(\gamma)d\gamma$$

où la première intégrale peut être majorée, en module par le sup de $|\Phi_i|$ sur S_{p_0} et la deuxième par ε multipliée par $\|\Phi_i\|_\infty$ (qui est inférieure à $\|\Phi\|_\infty$); donc si $i \geqq p_0$, $|\langle \Phi_i, \alpha \rangle| < 1 + \varepsilon(1 + \|\Phi\|_\infty)$. Comme $\langle \Phi_i, \alpha \rangle$ tend vers $\langle \Phi, \alpha \rangle$, nous avons $|\langle \Phi, \alpha \rangle| < 1$, et donc $\|\Phi\|_\infty \leqq 1$.

2.2.3. **Construction de la suite** (γ_k).

Soit $(\eta_{k,q})$ une double suite de nombres positifs tels que:

$$\prod_{k \geqq q} (1 + \eta_{k,q}) - 1 < e^{-q^2} \tag{2.18}$$

nous savons que quel que soit r, fini ou infini, il existe (cf. (2.15)) pour tout q, une suite $(d_q(k))$ d'entiers croissants tels que:

$$\sum_{|m| > d_q(k)} |p_{m,r}(u)| < \eta_{k,q} \qquad \text{pour } |u| < q, \text{ et quel que soit } r, \tag{2.19}$$

nous prendrons les entiers $d_q(k)$ croissant en fonction de q également.

Soit alors $\varepsilon(k) = \|\Phi\|_\infty / 8^k \cdot \prod_{i \leqq k+1} d_{k+1}(i)$ et $\varepsilon(0) = \|\Phi\|_\infty$ nous noterons plus rapidement

$$A_k = A_{\varepsilon(k)}(\Phi, \{\varphi_i\})$$

On prend γ_1 de telle façon que ses multiples non nuls jusqu'à l'ordre $2d_1(1)$ n'appartiennent pas à B_1.

On prend alors γ_2 de telle façon que ses multiples non nuls jusqu'à l'ordre $2d_2(2)$ n'appartiennent pas à la réunion prise pour $|n_1| \leqq 2d_2(1)$ de $(B_2 + n_1\gamma_1)$.

On prend alors γ_p tel que ses multiples d'ordre inférieur (en valeur absolue) à $2d_p(p)$ n'appartiennent pas à la réunion pour $|n_i| \leqq 2d_p(i)$ et $i < p$ de $(\theta_p + \sum_i n_i\gamma_i)$.

Cette construction est possible car tous les B_p possèdent la propriété (P). Nous noterons $r_k = r(\gamma_k) =$ ordre de γ_k

$$R_k = R(r_k) = \begin{cases} Z = \text{le groupe des entiers si } r_k = +\infty \\ Z/r_kZ \text{ si } r_k < +\infty. \end{cases}$$

Nous noterons $D(q)$ l'ensemble des éléments θ de D tels que $\theta(k) = 0$ si $k \leqq q$ et $F(q)$ l'ensemble des éléments de $D(q)$ de $k^{\text{ième}}$-composante inférieure en valeur absolue à $d_q(k)$ pour tout k ($|\theta(k)| \leqq d_q(k)$).

Soit N un entier positif plus grand que q, nous noterons $D(q,N)$ et $F(q,N)$ les ensembles des restrictions aux $k \leqq N$ des éléments de $D(q)$, respectivement $F(q)$.

Un entier q étant fixé, quel que soit $\gamma \in \Gamma$, il y a au plus

$$4^p \prod_{k<p} d_q(k) \tag{2.20}$$

éléments $\theta(k)$ de $F(q)$ tels que l'élément $\gamma + \sum_k \theta(k)\, \gamma_k \in A_p$. En effet la différence de deux tels éléments doit appartenir à B_p, et est de la forme $\gamma' = \sum_k n_k \gamma_k$ (où on a posé $n_k = \theta_1(k) - \theta_2(k)$, θ_1 et θ_2 étant deux éléments de $F(q)$) avec n_k nul pour $k \leqq q$ et $|n_k| \leqq 2d_q(k)$. Nous aurons le dénombrement (2.20), si nous montrons que n_k est nul pour $k > p$: supposons qu'il existe des n_k non nuls avec $k > p$, et soit n_N celui qui a le plus grand indice (alors N est supérieur à p, et aussi à q, car $n_k = 0$ si $k \leqq q$). Nous aurions alors

$$\begin{gathered} \sum_k n_k \gamma_k = \gamma' \in B_p \subset B_N \text{ (car } N > p\text{) et} \\ n_N \gamma_N \in \left(B_N - \sum_{k<N} n_k \gamma_k\right) \end{gathered} \tag{2.21}$$

or $|n_k| \leqq 2d_q(k)$, et comme $N > q$, $|n_k| < 2d_N(k)$, ce qui est en contradiction avec (1.21) d'après la construction de notre suite (γ_k).

2.2.4. **Majoration de** $\| e^{\cdot iua \cdot} \Phi \|_\infty$.

Nous noterons par $\tau(\gamma)\Phi$ la fonction translaté de Φ de γ, c'est à dire $\delta_\gamma \cdot \Phi$

$$e^{\cdot iua} = \prod_k \cdot \left[\sum_{m \in R_k} P_{m,r_k}(k^{-2}u)\delta_{m\gamma_k} \right] \tag{2.22}$$

où $\prod \cdot$ représente un produit de convolution.

2.2.4.1.

a est la somme d'une série convergente, soit N un entier, notons par a_N la somme des N premiers termes de cette série, et r_N la somme des autres termes; pour u donné, il existe un entier N_0 tel que $\| r_N \|_1 < 1/|u|$ pour tout $N > N_0$.

Choisissons alors N supérieur à la fois à N_0, et à $\sqrt{|u|/2\xi}$ où ξ est le nombre intervenant dans la majoration (2.17) (l'utilité de prendre $N > \sqrt{|u|/2\xi}$ sera vue dans 2.2.4.3.). Posons

$$a = a_N + r_N$$

$$e^{\cdot iua} = e^{\cdot iua_N} \cdot e^{\cdot iur_N}$$

et on a:

$$\| e^{\cdot iur_N} \|_1 < e. \tag{2.23}$$

2.2.4.2.

Prenons l'entier q tel que $q^3 \leqq |u| < (q+1)^3$, alors pour tout $k > q$, on a

$$|k^{-2}u| < q. \tag{2.24}$$

Nous allons décomposer alors $e^{\cdot iua^N}$ de la façon suivante:

$$L_q = \prod_{k \leqq q} \cdot \left[\sum_{m \in R_k} P_{m,r_k}(k^{-2}u)\delta_{m\gamma_k} \right] \tag{2.25}$$

$$M_{q,N} = \prod_{q<k<N} \cdot \left[\sum_{m \in R_k} P_{m,r_k}(k^{-2}u)\delta_{m\gamma_k} \right] \tag{2.26}$$

(N étant au moins de l'ordre de $|u|^{1/2}$, et a étant de l'ordre de $|u|^{1/3}$, dès que $|u|$ est assez grand on a $N > q$, ce qui donne un sens à notre décomposition).

Nous savons d'après la majoration (2.14) que quel que soit r on a:

$$\sum_{m \in R(r)} |P_{m,r}(v)| < 1 + A(|v|^2 + |v|)$$

donc

$$\| L_q \|_1 < (1 + A(|u|^2 + |u|))^q < c\exp(\rho |u|^{1/3} \operatorname{Log}|u|) \tag{2.27}$$

(c et ρ étant deux constantes positives convenablement choisies.)

Et nous avons également:

$$\| e^{\cdot iua} \cdot \Phi \|_\infty \leqq \| e^{\cdot iur^N} \|_1 \| L_q \|_1 \| M_{q,N} \cdot \Phi \|_\infty \tag{2.28}$$

c'est cette dernière norme que nous avons maintenant à majorer.

2.2.4.3.

Nous avons

$$M_{n,q} \cdot \Phi = \prod_{q<k<N} \left[\sum_{m \in R_k} P_{m,r_k}(k^{-2}u)\delta_{m\gamma_k} \right]$$

d'où, en développant ce produit:

$$M_{q,N} \cdot \Phi = \sum_{q \in D(q,N)} \left[\prod_{q<k<N} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)\tau\left(\sum_k \varphi(k)\gamma_k \right)\Phi \right]. \tag{2.29}$$

Posons alors:

$$S_{q,N} = \sum_{\varphi \in F(q,N)} \left[\prod_{q<k<N} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)\, \tau\left(\left[\sum_k \varphi(k)\gamma_k \right)\Phi \right] \tag{2.30}$$

$$T_{q,N} = \sum_{\alpha \in E(q,N)} \left[\prod_{q>k<N} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)\, \tau\left(\sum_k {}_\theta(k)\gamma_k \right)\Phi \right] \tag{2.31}$$

où $E(q,N)$ est le complémentaire de $F(q,N)$ dans $D(q,N)$; alors

$$M_{q,N} \cdot \Phi = S_{q,N} + T_{q,N}. \tag{2.32}$$

Pour majorer la norme de $S_{q,N}$ nous allons trouver une majoration indépendante de i (dès que i sera assez grand) du module de

(2.33) $$S_i(\gamma) = \sum_{\varphi \in F(q,N)} \left[\prod_{q<k<N} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)\,\Phi_i\Big(\gamma - \sum_k \varphi(k)\gamma_k\Big) \right]$$

(où Φ_i est $\Phi \cdot \varphi_i$); cette majoration ne dépendant, de plus, pas de γ, en utilisant le lemme 3 nous obtiendrons une majoration de la norme de $S_{q,N}$ dans $L^\infty(\Gamma)$.

Soit $\gamma \in \Gamma$ donné, soit φ un élément de $F(q,N)$, soit $p_\varphi = p(\varphi,\gamma)$ l'entier tel que $\gamma - \sum_k \varphi(k)\gamma_k$ appartienne à $A_{p\varphi} \cap \cdots A_{p\varphi-1}$, il existe un indice $i_\varphi = i(\varphi,\gamma)$ tel que pour tout $i > i_\varphi$, $\Phi_i(\gamma - \sum_k \varphi(k)\gamma_k)$ soit compris entre $\varepsilon(p_\varphi)$ et $\varepsilon(p_\varphi - 1)$. $F(q,N)$ est un ensemble fini, donc quel que soit i supérieur à tous les i, et quel que soit φ appartenant à $F(q,N)$, $\Phi_i(\gamma - \sum_k \varphi(k)\gamma_k)$ est compris entre $\varepsilon(p_\varphi)$ et $\varepsilon(p_\varphi - 1)$.

Il existé an plus $4_p \prod_{k<p} d_q\ (k)$ éléments de $F(q,N)$ tels que $\gamma - \sum_k \varphi(k)\,\gamma_k$ soit dans $A_p \cap \cdots A_{p-1}$ donc tels que $\Phi_i(\gamma - \sum_k \varphi(k)\gamma_k)$ soit compris entre $\varepsilon(p)$ et $\varepsilon(p-1)$.

Soit $s(u)$ le nombre d'entiers k tels que $k > q$, et $\xi < |k^{-2}u| < 2\xi$ (cf. majoration (2.17)), nous pouvons majorer le produit $\prod_{q<k<N} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)$ par $\alpha^{s(u)}$ N a été choisi supérieur à $\sqrt{|u|/2\xi}$ (cf. 2.2.4.1), donc tous les k tels que $|k^{-2}u| < 2\xi$ sont inférieurs à N, et $s(u)$ est de l'ordre de $|u|^{1/2}$, car il est compris entre $s_0(u)$ et $s_0(u) - q$ (où $s_0(u)$ et le nombre d'entiers vérifiant $\xi < |k^{-2}u| < 2\xi$, ce qui donne $s_0(u)$ de l'ordre de $|u|^{1/2}$ alors que q est de l'ordre de $|u|^{1/3}$.

Nous avons alors:

$$|S_i(\gamma)| < \alpha^{s(u)} \sum_p \varepsilon(p)4^p \prod_{k<p} d_q(k) < \alpha^{s(u)} \|\Phi\|_\infty\, 4\Big(\sum_n 1/2^n\Big)$$

soit

$$|S_i(\gamma)| < c_1 \exp(-\beta_1 |u|^{1/2})$$

où c_1 et β_1 sont des constantes positives bien choisies; et donc

(2.34) $$\|S_{q,N}\|_\infty < c_1 \exp(-\beta_1 |u|^{1/2}).$$

2.2.4.4.

Il nous reste alors à majorer la norme de $T_{q,N}$.

Soit $G(q,N)$ l'ensemble des fonctions $\psi(k)$ de $D(q,N)$ telles que $\psi(k)$ soit ou nul ou supérieur en valeur absolue à $d_q(k)$. Alors tout élément $\theta(k)$ de $E(q,N)$ se décompose en somme d'une fonction $\varphi(k)$ de $F(q,N)$ et d'une fonction $\psi(k)$ de (q,N), cette décomposition étant unique si on impose de plus la condition d'orthogonalité $\varphi(k)\psi(k) = 0$, on prend pour cela

$$\varphi(k) \begin{cases} = \theta(k) & \text{si } |\theta(k)| \leq d_q(k) \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$\psi(k) = \theta(k) - \varphi(k).$$

Nous décomposerons toujours les éléments de $E(q,N)$ de cette façon.

Nous allons alors calculer la somme (2.31) qui donne $T_{q,N}$ en regroupant les termes correspondant aux fonctions $\theta(k)$ ayant même composante sur $F(q,N)$, $\varphi(k)$, et en utilisant la formule

$$(2.35)\quad \prod_{q<k<N} P_{\theta(k),r_k}(k^{-2}u) = \left[\prod_{\varphi(k)\neq 0} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)\right]\left[\prod_{\substack{\varphi(h)=0\\ q<k<N}} P_{\varphi(h),r_h}(h^{-2}u)\right]$$

nous avons:

$$(2.36)\qquad T_{q,N} = \sum_{\varphi\in G(q,N)}\left[\prod_{\varphi(k)\neq 0} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)\,S(\psi)\right]$$

où $S(\psi)$ est défini par:

$$(2.37)\qquad S(\psi) = \sum_{\substack{\varphi\in F(q,N)\\ \varphi\psi=0}}\left[\prod_{\substack{\psi(h)=0\\ q<h<N}} P_{\varphi(h),r_h}(h^{-2}u)\tau\left(\sum\psi(k)\gamma_k + \sum\varphi(h)\gamma_h\right)\Phi\right]$$

$S(\psi)$ peut également s'écrire:

$$S(\psi) = \tau\left(\sum_k \psi(k)\gamma_k\right)\left[\sum_{\substack{\varphi\in F(q,N)\\ \varphi\psi=0}}\left(\prod_{\substack{\psi(h)=0\\ q<h<N}} P_{\varphi(h),r_h}(h^{-2}u)\left(\sum\varphi(h)\gamma_h\right)\Phi\right)\right].$$

Nous majorerons alors ce terme comme nous avons majoré la norme de $S_{q,N}$ dans 2.2.4.3., avec la différence que nous ne pouvons ici majorer la valeur absolue du produit

$$\prod_{\substack{\psi(h)=0\\ q<h<N}} P_{\varphi(h),r_h}(h^{-2}u)$$

que par 1, et que la sommation ne portant que sur une partie de $F(q,N)$, notre méthode de majoration de la norme de la somme de translatés de Φ, sera à fortiori valable; nous obtenons ainsi le résultat:

$$(2.38)\qquad \| S(\psi)\|_\infty < 8\,\|\Phi\|_\infty.$$

Enfin nous avons

$$\sum_{\psi\in G(q,N)}\left[\prod_{\psi(k)\neq 0} P_{\psi(k),r_k}(k^{-2}u)\right] = \left[\prod_{q<k<N}[1 + \prod_{|m|>d_q(k)} |p_{m,r_k}(k^{-2}u)|]\right] - 1$$

et d'après le choix de q ($|q^{-2}u| < q$), et les inégalités (1.18) et (1.19), nous obtenons

$$(2.39)\qquad \| T_{q\,N}\|_\infty < 8\,\|\Phi\|_\infty\, e^{-q^2} \leqq c_2\exp(-\beta_2|u|^{2/3}).$$

2.2.4.5.

La majoration de la norme de $T_{q,N}$ est négligeable devant celle de la norme de $S_{q,N}$, et nous avons donc pour $\| e^{\cdot iua}\cdot\Phi\|_\infty$ une majoration du type suivant:

$$(2.40)\qquad \| e^{\cdot iua}\cdot\Phi\|_\infty < C\exp(\beta|u|^{1/3}\operatorname{Log}|u| - \beta'|u|^{1/2})$$

ce qui entraine, le terme en $|u|^{1/2}$ étant d'ordre supérieur au premier que *l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{\cdot iua}\cdot\Phi\|_\infty(1+|u|)du$$

converge.

2.3. **Démonstration du théorème** 2′.

Ce théorème n'est qu'un affaiblissement du théorème 2, car nous avons la propriété:

$$\tilde{A}_\varepsilon(\Phi) \supset A_{2\varepsilon}(\Phi). \tag{2.41}$$

En effet, Φ étant donné, soit $\gamma \in A_{2\varepsilon}$, et soit V un voisinage arbitraire de γ, soit W un voisinage de l'origine de Γ, tel que $W + W \subset V - \gamma$; d'après la convergence des φ_i vers δ, il existe i_0 tel que pour $i \geqq i_0$, la norme dans $L^1(\Gamma)$ de φ_i restreint au complémentaire de W soit inférieure à $\varepsilon/\|\Phi\|_\infty$; comme $\gamma \in A_{2\varepsilon}$ il existe un $i \geqq i_0$ tel que $|\varphi_i \cdot \Phi|(\gamma) > 2\varepsilon$, et $\varphi_i \cdot \Phi$ étant continue il existe une fonction continue α à support compact inclu dans W, de norme 1 dans $L^1(\Gamma)$, telle que $|\alpha \cdot \varphi_i \cdot \Phi|(\gamma) > 2\varepsilon$. Alors (la restriction de φ_i au complémentaire de W étant de norme inférieure à $\varepsilon/\|\Phi\|_\infty$) la fonction β, produit de convolution de α et de la restriction φ_i à W, est continue, a son support dans $V - \gamma$, et on a $|\beta \cdot \Phi|.\ (\gamma) > \varepsilon$, ce qui entraine que $\|\Phi_V\|_\infty > \varepsilon$. Ceci étant vrai quel que soit le voisinage V de γ, $d\Phi(\gamma) > \varepsilon$.

§3. **Démonstration du théorème** 3.

Soit Φ un élément de $L_0^\infty(\Gamma)$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné nous noterons $A_\varepsilon(\Phi)$ le plus petit fermé tel que la norme de Φ restreint au complémentaire de $A_\varepsilon(\Phi)$ soit inférieure à ε. Quand le groupe Γ a une base dénombrable de voisinage de l'origine, les ensembles ainsi définis sont les $\tilde{A}_\varepsilon(\Phi)$.

Nous poserons $B_\varepsilon(\Phi) = A_\varepsilon(\Phi) - A_\varepsilon(\Phi)$, et la propriété de d'appartenir à $L_0^\infty(\Gamma)$ se traduit par le fait que les ensembles $A_\varepsilon(\Phi)$ et $B_\varepsilon(\Phi)$ sont compacts. Nous démontrerons alors un lemme, qui, avec le théorème 2′ démontre le théorème 3 dans le cas où Γ a une base dénombrable de voisinage de l'élément neutre.

3.1. LEMME 4. *Dans un groupe localement compact non compact* Γ, *tout compact possède la propriété* (*P*).

Nous allons utiliser le résultat classique suivant:

Soit Γ un groupe localement non compact abélien, et soit U un voisinage compact symétrique de l'unité.

Soit Γ' le sous-groupe engendré par U, alors Γ' contient un sous-groupe discret D engendré par un nombre fini d'éléments tel que Γ'/D soit compact.

Nous allons traiter les deux cas suivants:

a) Γ contient un élément γ_0 d'ordre infini qui engendre un sous-groupe discret.

b) Si on n'est pas dans les conditions du a), D est un groupe compact (engendré par un nombre fini d'éléments d'ordre fini), donc aussi Γ'. Γ' étant engendré par un voisinage de l'origine, il est ouvert donc Γ/Γ' est un groupe discret, soit H, dont tous les éléments sont d'ordre fini.

La réunion d'un nombre fini de compacts étant compact, nous allons démontrer que pour un compact K et un nombre entier positif arbitraire N il existe un élément γ de Γ tel que tous ses multiples non nuls d'ordre n avec $|n| < N$, soient hors de K.

a) Soit (γ_0) le groupe $\gamma_0 \cdot Z$ engendré par γ_0; ou bien K ne rencontre pas (γ_0) et le problème est résolu en prenant $\gamma = \gamma_0$, ou bien K rencontre (γ_0) et $K \cap (\gamma_0)$ est compact donc fini; soit alors A le plus grand des entiers tels que $A \cdot \gamma_0 \in K \cap (\gamma_0)$, il suffit de prendre pour γ l'élément $(|A| + 1) \cdot \gamma_0$.

b) l'image K' de K par la projection $\Gamma \to \Gamma/\Gamma' = H$ est compacte donc finie, si $t \in \Gamma/\Gamma'$ est tel que tous ces multiples non nuls et d'ordre $|n| < N$ ne sont pas dans K', un représentant γ dans Γ de la classe t répond à la question. Il suffit de traiter le problème dans le cas d'un groupe Γ discret dont tous les éléments sont d'ordre fini.

Soit K une partie finie d'un groupe discret infini; soit N un entier positif donné, supposons que pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, $\exists\, n \leqq N$ tel que $n\gamma \neq 0$ et $n\gamma \in K$; en d'autres termes, soit K_n l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $n\gamma \neq 0$ et $n\gamma \in K$: nous supposons que $\Gamma = \bigcup_{n \leqq N} K_n$. Alors soient γ_1 et γ_2 deux éléments de K_n avec $n\gamma_1 = n\gamma_2$ leur différence est d'ordre inférieur ou égal à n, et appartient à $\bigcup_{n \leqq N} K_n$, donc appartient à un K_p avec $p < n$. Si nous supposons que tous les K_p sont finis pour $p < n$, comme K est aussi fini, K_n est fini; or $K_1 = K$ est fini dans par récurrence K_p est fini quel que soit p; $\bigcup_{n \leqq N} K_n$ est donc fini, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3.2. **Cas des bases non-dénombrable de voisinages.** Lorsque Γ n'a pas de base dénombrable de voisinage de l'origine, il nous faut reprendre, pour une fonction Φ appartenant à $L_0^\infty(\Gamma)$ la démonstration du lemme 2, qui s'énonce sous la forme suivante:

LEMME 5. *Soit Γ un groupe localement compact, Φ un élément de $L_0^\infty(\Gamma)$, il existe une mesure bornée a sur Γ, telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| e^{\cdot iua} \cdot \Phi \|_\infty (1 + |u|) du < +\infty.$$

Nous utiliserons ici, pour désigner les quantités analogues à celles intervenant dans le lemme 2, les mêmes notations (aucune confusion n'étant possible).

Nous définirons une suite (γ_k) d'éléments, de Γ, comme dans 2.2.3., les ensembles $A_\varepsilon(\Phi)$ jouant ici le rôle des ensembles $A_\varepsilon(\Phi, (\varphi_i\})$ du lemme 2 (nous noterons encore A_k et B_k pour $A_{\varepsilon(k)}(\Phi)$ et $B_{\varepsilon(k)}(\Phi)$. Nous prendrons alors pour mesure a la mesure

$$a = \sum_k k^{-2}(1/2i)(\delta_{\gamma_k} - \delta_{-\gamma_k}).$$

Nous allons alors majorer la norme $\| e^{iua} \cdot \Phi \|_\infty$ en procédant comme dans 2.2.4: la suite d'unités approchées, et la définition des ensembles A_k n'intervenaient que dans les deux majorations (2.34) et (2.38) où les quantités $S_{q,N}$ et $S(\psi)$ sont définies par (2.30), et (2.37); nous allons montrer que, sous nos nouvelles hypothèses, ces majoratios sont encore valables.

Soit $\gamma \in \Gamma$, et soit φ un élément de $F(q,N)$: notons $p_\varphi = p(y,\varphi)$ l'entier tel que $\gamma - \sum_k \varphi(k)\gamma_k$ appartienne à $A_p \cap \cdots A_{p-1}$. Il existe alors un voisinage $V(\gamma,\varphi)$ de γ tel que la norme de la restriction à $V(\gamma,\varphi)$ de $\tau(\sum_k \varphi(k)\gamma_k)\Phi$ soit comprise entre $\varepsilon(p_\varphi)$ et $\varepsilon(p_\varphi - 1)$. Soit $V(\gamma)$ l'intersection des voisinages $V(\gamma,\varphi)$ quand φ parcourt l'ensemble fini $F(q,N)$.

Nous majorons comme dans 2.2.4.3. le module produit $|\prod_{q<k<N} P_{\varphi(k),r_k}(k^{-2}u)|$ par $\alpha^{s(u)}$ ($\alpha < 1$, et $s(u)$ de l'ordre de $|u|^{1/2}$); comme il existe au plus $4^p \prod_{k<p} d_q(k)$ éléments φ de $F(q,N)$ dont le p_φ soit égal à p, nous obtenons que la norme de la restriction à $V(\gamma)$ de $S_{q,N}$ est majorée par $8\|\Phi\|_\infty \alpha^{s(u)}$; cette majoration ne dépendant pas du point γ, majore la norme $\|S_{q,N}\|_\infty$, d'où la majoration (2.34).

Les termes $S(\psi)$ se majorent comme $S_{q,N}$, mais en majorant le coefficient

$$\prod_{\substack{\psi(h)=0\\ q<k<N}} P_{\varphi(h),r_h}(h^{-2}u)$$

en module par 1; ce qui nous donne bien la majoration (2.38).

§4. **Cas particulier du groupe $\mathbf{Z}^n$.**

4.1. **Démonstration du théorème** 4.

Ce théorème se déduit du théorème 2 à l'aide du lemme suivant:

LEMME 6. *Tout ensemble de densité inférieure nulle dans $\mathbf{Z}^n$, possède la propriété (P).*

Nous pouvons donner une définition de la densité inférieure d'un ensemble discret B dans $\mathbf{R}^n$ de la façon suivante:

On appellera "densité inférieure" de B la limite inférieure quand x tend vers $+\infty$ du rapport $|B \cap J_x|(2x)^{-n}$, où J_x est le cube des points de coordonnées en valeur absolue inférieure ou égale à x, et $|A|$ est le nombre d'éléments de A, si A est une partie de $\mathbf{R}^n$.

Si nous injectons $\mathbf{Z}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, les deux définitions de densités inférieures d'un sou-sensemble de $\mathbf{Z}^n$ coïncident.

La propriété, pour un sous-ensemble discret de $\mathbf{R}^n$ d'être de densité inférieure nulle est évidemment stable par translation et par réunion finie. Soit x un nombre réel, non nul et B un sous-ensemble discret de $\mathbf{R}^n$, nous noterons xB l'ensemble des éléments xb où b parcourt B; la propriété d'être de densité inférieure nulle est aussi stable par "multiplication" que un réel non nul x.

Soit alors B un sous ensemble de $\mathbf{Z}^n$ de densité inférieure nulle, N un entier, la réunion pour tout $p \leqq N$ du "quotient" par p d'un nombre fini de translatés de B est dans R^n de densité inférieure nulle, donc ne peut pas contenir $\mathbf{Z}^n_+$ donc B possède la propriété (P).

4.2. **Démonstration du théorème** 5.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons la mesure dF sur C, où F est la fonction de Lebesgue (Zygmund, Trigonometric series, 2ème édition, vol. 1, p. 196); cette mesure a pour support l'ensemble de Cantor; l'ensemble de Cantor est isomorphe, en tant qu'espace topologique au produit d'une infinite dénombrable de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et la mesure dF considérée n'est autre que la transportée par cet isomorphisme de la mesure de Haar de ce groupe produit. La transformée de Fourier de dF est la fonction de $L^\infty(Z)$

$$\Phi(n) = (-1)^n(2\pi)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi 3^{-k} n) \tag{4.1}$$

qui n'appartient pas à L_0^∞ $(\mathbf{Z})$(car $\Phi(3n) = \Phi(n)$), et dont le spectre est l'ensemble de Cantor. Le théorème résulte du lemme suivant:

LEMME 7. *Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, soit A l'ensemble des entiers tels que, $|\Phi(n)| > \varepsilon$, et soit $B_\varepsilon = A_\varepsilon - A_\varepsilon$, B_ε est de densité nulle.*

Nous utiliserons l'écriture des entiers dans la base 9. Soit n un élément de A_ε (où $\varepsilon > 0$ donné), soit

$$2n = \alpha_p \alpha_{p-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0 \tag{4.2}$$

l'écriture dans le système à base 9 de $2n$, la fonction $\Phi(n)$ s'écrit:

$$\Phi(n) = \prod_{i=0}^{i=p} \cos(\pi \alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_0) \prod_{k=0}^{\infty} \cos(2\pi n 3^{-(2k+1)}) \prod_{h=p}^{\infty} \cos(2\pi n 3^{-2h}). \tag{4.3}$$

Donc n ne peut appartenir à A_ε, que si le premier produit est déjà de valeur absolue supérieure à ε; soit $N(\varepsilon)$ le plus petit entier tel que $|\cos(\pi/9)|^{N(\varepsilon)}$ soit inférieur à ε, si n appartient à A_ε l'écriture dans la base 9 de $2n$ ne contient au plus que $N(\varepsilon)$ chiffres différents de 0 et 8.

Soit R un entier, posons

$$B_{\varepsilon,R} = B_\varepsilon \cap [-9^R, +9^R]. \tag{4.4}$$

Si n appartient à $B_{\varepsilon,R}$, on a

(4.5) $n = n_1 - n_2$ où n_1 et n_2 appartiennent à A_ε.

(4.6) $n = n_1 - n_2$ où $|n_1|$ et $|n_2|$ sont les restes de la division par 9^{R+1} de $|n_1|$ et $|n_2|$

(4.5) provient de la définition de B_ε, et (4.6) du fait que nous supposons $n \in [-9^R, +9^R]$. De plus $2n_1$ et $2n_2$ ont dans leurs écritures en base 9 au plus

$N(\varepsilon)$ chiffres différents de 0 et 8, donc $2n_1'$ et $2n_2'$ ont dans leurs écritures en base 9 au plus $N(\varepsilon)+1$ chiffres différents de 0 et 8. Le nombre d'éléments de $B_{\varepsilon,R}$ sera donc inférieur au carré du nombre $n_R(\varepsilon)$ entiers appartenant à $[-9^{R+1}, +9^{R+1}]$, dont l'écriture en base 9 contient au plus $N(\varepsilon)+1$ chiffres différents de 0 et 8. Or nous avons:

$$n_R(\varepsilon) < 2\binom{N(\varepsilon)+1}{R+1} 2^{R-N(\varepsilon)} 9^{N(\varepsilon)+1} \tag{4.7}$$

où $\binom{n}{p}$ est le nombre de combinaisons de p éléments pris n à n.

Le nombre d'éléments de $[-9^R, +9^R]$ tend plus vite vers l'infini que $n_R(\varepsilon)^2$ *donc* B_ε *est de densité nulle.*

Bibliographie

1. J.-P. Kahane and Y. Katznelson, *Contribution à deux problèmes, concernant les fonctions de la classe A*, Israel J. Math., **1**, (1963).

2. P. Malliavin, *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts*, Publ. Math. de l'I.H.E.S., 2 (1959).

3. P. Malliavin, *Ensemble d'unicité et Synthèse Spectrale* (Congrès Stockholm) (1962).

4. W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no 12.

5 A. Zygmund, *Trigonometric series*, 2ème edition, vol. 1.

Faculte des Sciences,
Departement des Mathematiques,
Orsay (s.et o.) france